Civil Services (Main)
Examination, 2026

**KVMS–P–MTC**

# गणित (प्रश्न-पत्र–I)

| निर्धारित समय : तीन घण्टे | अधिकतम अंक : 250 |
|---|---|

## प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

(उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़िए)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं, जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हुए हैं।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

---

# MATHEMATICS (PAPER–I)

| Time Allowed : Three Hours | Maximum Marks : 250 |
|---|---|

## QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

## खण्ड—A / SECTION—A

1. *(a)* $a$ के वे सभी मान ज्ञात कीजिए, जिनके लिए समघातीय समीकरणों के निकाय

$$ax + y + z = 0$$
$$x + y - z = 0$$
$$x + y - az = 0$$

के अतुच्छ हल हैं, और अतः $a$ के प्रत्येक मान के लिए सभी हल निर्धारित कीजिए।

Find all the values of $a$ for which the system of homogeneous equations

$$ax + y + z = 0$$
$$x + y - z = 0$$
$$x + y - az = 0$$

has non-trivial solutions, and hence determine all the solutions for each value of $a$. 10

*(b)* यदि $A$ और $B$ समरूप आव्यूह हैं, तो दर्शाइए कि $A$ और $B$ की कोटि (रैंक), अनुरेख (ट्रेस), अभिलाक्षणिक बहुपद और अभिलाक्षणिक मान समान होते हैं।

If $A$ and $B$ are similar matrices, then show that $A$ and $B$ have the same rank, trace, characteristic polynomial and eigenvalues. 10

*(c)* यदि $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ है, तो $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, then find the value of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. 10

*(d)* मैकलॉरिन प्रमेय का प्रयोग करते हुए $x$ की आरोही घातों में $e^{x \cos x}$ के प्रसार के प्रथम चार पद प्राप्त कीजिए। अतः या अन्य विधि से $\frac{e^x - e^{x \cos x}}{x - \sin x}$ की सीमा (लिमिट) ज्ञात कीजिए, जब $x$ शून्य की ओर अग्रसर होता है।

Using Maclaurin's theorem, obtain the first four terms of the expansion of $e^{x \cos x}$ in ascending powers of $x$. Hence or otherwise find the limit of $\frac{e^x - e^{x \cos x}}{x - \sin x}$ as $x$ tends to zero. 10

(e) उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र, रेखा $5y+2z=0=2x-3y$ पर है तथा जो बिंदुओं (0, −2, −4) और (2, −1, −1) से होकर जाता है।

Obtain the equation of the sphere having its centre on the line $5y+2z=0=2x-3y$ and passing through the points (0, −2, −4) and (2, −1, −1). 10

2. (a) माना $T: P_2[x] \to P_2[x]$ एक रैखिक रूपांतरण है, जिसे

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = -(a_0 + 2a_1 + a_2) + (2a_0 + 3a_1)x - 2(a_0 + a_1)x^2$$

द्वारा परिभाषित किया गया है, जहाँ $P_2[x]$, $x$ में सभी बहुपदों का समुच्चय है, जिनकी घात $\leq 2$ है तथा $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ हैं। $P_2[x]$ के मानक आधार के सापेक्ष $T$ के आव्यूह निरूपण का उपयोग करते हुए $T$ के अभिलाक्षणिक मान तथा संगत अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए।

Let $T: P_2[x] \to P_2[x]$ be a linear transformation defined by

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = -(a_0 + 2a_1 + a_2) + (2a_0 + 3a_1)x - 2(a_0 + a_1)x^2$$

where $P_2[x]$ denotes the set of all polynomials in $x$ of degree $\leq 2$ and $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Find the eigenvalues and corresponding eigenvectors of $T$ using the matrix representation of $T$ with respect to the standard basis of $P_2[x]$. 20

(b) यदि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण तथा एक अन्य भुजा की लंबाइयों का योग दिया गया हो, तो इन भुजाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए, जिसके लिए त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम है।

If the sum of the lengths of the hypotenuse and another side of a right-angled triangle be given, then find the angle between these sides so that the area of the triangle is maximum. 15

(c) रेखाओं $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ और $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ पर वे बिंदु ज्ञात कीजिए, जो एक-दूसरे के निकटतम हैं। अतः इन रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी तथा इसका समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the points on the lines $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ and $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ which are nearest to each other. Hence find the shortest distance between the lines and its equation. 15

3\. *(a)* क्षेत्र $\mathbb{R}$ पर एक सदिश समष्टि के रूप में $P_3[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ दिया गया है।

*(i)* माना $H = \{ p(x) \in P_3[x] \mid \int_{-1}^{1} p(x)\, dx = 0\}$ है। सिद्ध कीजिए कि $H$, $P_3[x]$ की एक उपसमष्टि है तथा $H$ का एक आधार ज्ञात कीजिए।

*(ii)* $P_3[x]$ की एक उपसमष्टि $K$ ज्ञात कीजिए, जिसके लिए $P_3[x] = H \oplus K$ है।

Given $P_3[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ as a vector space over the field $\mathbb{R}$.

*(i)* Let $H = \{ p(x) \in P_3[x] \mid \int_{-1}^{1} p(x)\, dx = 0\}$. Prove that $H$ is a subspace of $P_3[x]$ and find a basis of $H$.

*(ii)* Find a subspace $K$ of $P_3[x]$ such that $P_3[x] = H \oplus K$. 8+7=15

*(b)* *(i)* समाकलन के क्रम को उलटकर द्विशः समाकल $\int_0^2 \int_{x^2+1}^{2x+1} x^2 y\, dy\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate the double integral $\int_0^2 \int_{x^2+1}^{2x+1} x^2 y\, dy\, dx$ by reversing the order of integration. 10

*(ii)* उस ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए, जो निर्देशांक समतलों $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ तथा समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ के प्रतिच्छेदन से बनता है।

Find the volume of the solid, which is formed from the intersection of the coordinate planes $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ and the plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. 10

*(c)* यदि $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, शंकु $5yz - 8zx - 3xy = 0$ के तीन परस्पर लंबवत् जनकों के समुच्चय में से किसी एक को निरूपित करता है, तब अन्य दो के समीकरण ज्ञात कीजिए।

If $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ represents one of a set of three mutually perpendicular generators of the cone $5yz - 8zx - 3xy = 0$, then find the equations of the other two. 15

4. *(a)* माना $F$ सम्मिश्र संख्याओं का एक उपक्षेत्र है तथा $T$, $F^3$ से $F^3$ तक रैखिक रूपांतरण है, जिसे

$$T(x, y, z) = (x - y + 2z,\ 2x + y,\ -x - 2y + 2z)$$

द्वारा परिभाषित किया गया है। यदि $F^3$ में $(a, b, c)$ एक सदिश है, तो निम्नलिखित के उत्तर दीजिए :

*(i)* $a$, $b$, $c$ पर वह शर्त ज्ञात कीजिए, जिसके लिए सदिश $(a, b, c)$, $T$ की शून्य समष्टि में हो। $T$ की शून्यता क्या है?

*(ii)* $a$, $b$, $c$ पर वह शर्त ज्ञात कीजिए, जिसके लिए सदिश $(a, b, c)$, $T$ के परिसर (रेंज) में हो। $T$ की कोटि (रैंक) क्या है?

Let $F$ be a subfield of complex numbers and let $T$ be the linear transformation from $F^3$ into $F^3$, defined by

$$T(x, y, z) = (x - y + 2z,\ 2x + y,\ -x - 2y + 2z)$$

If $(a, b, c)$ is a vector in $F^3$, then answer the following :

*(i)* Find the condition on $a$, $b$, $c$ such that the vector $(a, b, c)$ be in the null space of $T$. What is the nullity of $T$?

*(ii)* Find the condition on $a$, $b$, $c$ such that the vector $(a, b, c)$ be in the range of $T$. What is the rank of $T$? 8+7=15

*(b)* वक्र $y^2(a + x) = x^2(3a - x)$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve $y^2(a + x) = x^2(3a - x)$. 15

*(c)* *(i)* अतिपरवलयज

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

की उन जनक रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं $(2, 3, -4)$ और $(2, -1, \frac{4}{3})$ से होकर जाती हैं।

Find the equations of the generating lines of the hyperboloid

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

which pass through the points $(2, 3, -4)$ and $(2, -1, \frac{4}{3})$. 10

(ii) उस लंबवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका अक्ष $x = 2y = -z$ है तथा त्रिज्या 4 है। सिद्ध कीजिए कि समतल $z = 0$ द्वारा इस बेलन के परिच्छेद (सेक्शन) का क्षेत्रफल $24\pi$ है।

Find the equation of the right circular cylinder whose axis is $x = 2y = -z$, and radius is 4. Prove that the area of the section of this cylinder by the plane $z = 0$ is $24\pi$. 10

## खण्ड—B / SECTION—B

**5.** (a) यदि $y_1$ और $y_2$, $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ के दो हल हैं तथा $y_2 = y_1 u$ है, तो दर्शाइए कि $u = 1 + ae^{-\int\left(\frac{Q}{y_1}\right)dx}$ है, जहाँ $a$ एक शून्येतर अचर है।

If $y_1$ and $y_2$ are two solutions of $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, and $y_2 = y_1 u$, then show that $u = 1 + ae^{-\int\left(\frac{Q}{y_1}\right)dx}$, where $a$ is a non-zero constant. 10

(b) शर्तों $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$ के अधीन, लाप्लास रूपांतरण लागू करके $(D^2 + D)\, y(t) = 2$, $D \equiv \frac{d}{dt}$ को हल कीजिए।

Apply Laplace transform to solve $(D^2 + D)\, y(t) = 2$, $D \equiv \frac{d}{dt}$, subject to the conditions $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$. 10

(c) परिक्रमण का एक चिकना परवलयज इस प्रकार स्थित है कि उसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है तथा शीर्ष ऊपर की ओर है; इस पर $2\pi b$ अतानित लंबाई की एक भारी प्रत्यास्थ डोरी रखी है। जब डोरी संतुलन में हो, तो कल्पित कार्य का सिद्धांत (नियम) लागू करके यह दर्शाइए कि यह $\frac{4\pi ab\lambda}{4\pi a\lambda - Wb}$ त्रिज्या के एक वृत्त के रूप में है, जहाँ $W$ डोरी का भार है, $\lambda$ प्रत्यास्थता गुणांक है तथा $4a$ जनक परवलय का नाभिलंब है।

A smooth paraboloid of revolution is fixed with its axis vertical and vertex upwards; on it is placed a heavy elastic string of unstretched length $2\pi b$. When the string is in equilibrium, apply the principle of virtual work to show that it rests in the form of a circle of radius $\frac{4\pi ab\lambda}{4\pi a\lambda - Wb}$, where $W$ is the weight of the string, $\lambda$ is the modulus of elasticity and $4a$ is the latus rectum of the generating parabola. 10

(d) एक कण, एक उल्टी कैटेनरी के शीर्ष से विराम अवस्था से नीचे गिरता है। सिद्ध कीजिए कि कण वक्र को तब छोड़ेगा, जब कण द्वारा तय किया गया पथ उस ऊर्ध्वाधर दूरी का $\sqrt{3}$ गुना हो, जितनी दूरी तक कण नीचे गिरा है।

A particle falls from rest at the vertex of an inverted catenary. Prove that the particle will leave the curve when the path described is $\sqrt{3}$ times the vertical distance through which the particle has fallen. 10

(e) दिया गया है कि $\vec{F} = (2x+3y)\hat{i} - 4z\hat{j} - 5x\hat{k}$ है तथा $S$ सतह $2x+4y+4z=5$ है, जो $x=0$, $x=2$, $y=0$ और $y=3$ द्वारा परिबद्ध है। $\iint\limits_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS$ का मान ज्ञात कीजिए।

Given $\vec{F} = (2x+3y)\hat{i} - 4z\hat{j} - 5x\hat{k}$ and $S$ is the surface $2x+4y+4z=5$, bounded by $x=0$, $x=2$, $y=0$ and $y=3$. Evaluate $\iint\limits_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS$. 10

6. (a) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{\sin(\log x) + 1}{x} \log x$ को हल कीजिए।

Solve $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{\sin(\log x) + 1}{x} \log x$. 15

(b) (i) एक जंगी जहाज $u$ वेग से आगे बढ़ रहा है। जहाज पर एक बन्दूक इस तरह लगाई गई है कि उसका मुँह ठीक पीछे की ओर है तथा उसे उन्नयन कोण $\alpha$ पर रखा गया है। यदि बन्दूक के सापेक्ष प्रक्षेपण (प्रोजेक्शन) का वेग $v$ हो, तो दर्शाइए कि परास $\dfrac{2v}{g}\sin\alpha\,(v\cos\alpha - u)$ है तथा अधिकतम परास के लिए कोण है

$$\cos^{-1}\left(\frac{u+\sqrt{u^2+8v^2}}{4v}\right)$$

जहाँ $g$ गुरुत्वीय त्वरण को दर्शाता है।

A battleship is steaming ahead with velocity $u$. A gun is mounted on the ship so as to point straight backwards and is set at an angle of elevation $\alpha$. If $v$ be the velocity of projection relative to the gun, show that the range is $\dfrac{2v}{g}\sin\alpha\,(v\cos\alpha - u)$ and the angle for maximum range is

$$\cos^{-1}\left(\frac{u+\sqrt{u^2+8v^2}}{4v}\right)$$

where $g$ stands for acceleration due to gravity. 10

(ii) एक एकसमान जंजीर (चेन), जिसकी लंबाई $l$ है, का एक सिरा एक खुरदरी मेज से $h$ ऊँचाई पर स्थिर है और यह एक ऊर्ध्वाधर तल में इस प्रकार रखी है कि इसका एक हिस्सा मेज पर एक सीधी रेखा में है। सिद्ध कीजिए कि यदि चेन फिसलने की कगार पर है, तो मेज पर उसकी लंबाई $(l+\mu h)-\sqrt{(\mu^2+1)h^2+2\mu lh}$ है, जहाँ $\mu$ घर्षण गुणांक है।

A uniform chain of length $l$ has one end fixed at a height $h$ above a rough table and rests in a vertical plane so that a portion of it lies in a straight line on the table. Prove that if the chain is on the point of slipping, the length on the table is $(l+\mu h)-\sqrt{(\mu^2+1)h^2+2\mu lh}$, where $\mu$ is the coefficient of friction. 10

(c) परवलय $y^2=4ax$ के लिए $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$, $\kappa$ और $\tau$ निर्धारित कीजिए, जहाँ $a$ एक अचर है। यहाँ $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$, $\kappa$ तथा $\tau$ क्रमशः एकक स्पर्शी सदिश, एकक मुख्य अभिलम्ब सदिश, एकक उपाभिलम्ब सदिश, वक्रता तथा मरोड़ को निरूपित करते हैं।

Determine $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$, $\kappa$ and $\tau$ for the parabola $y^2=4ax$, where $a$ is a constant. Here $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$, $\kappa$ and $\tau$ denote unit tangent vector, unit principal normal vector, unit binormal vector, curvature and torsion respectively. 15

**7.** (a) प्राकृतिक लंबाई $l$ की एक हल्की प्रत्यास्थ डोरी का एक सिरा बिंदु $A$ पर स्थिर है तथा दूसरा सिरा एक पत्थर (द्रव्यमान $m$) से जुड़ा है; संतुलन की स्थिति में इस पत्थर का भार डोरी को खींचकर $b$ लंबाई तक बढ़ा देता है। दर्शाइए कि यदि पत्थर को बिंदु $A$ से विराम अवस्था से गिराया जाए, तो वह

$$\sqrt{\frac{2l}{g}}+\sqrt{\frac{b-l}{g}}\left\{\pi-\cos^{-1}\sqrt{\frac{b-l}{b+l}}\right\}$$

समय में संतुलन की स्थिति से $\sqrt{b^2-l^2}$ नीचे तात्क्षणिक विराम अवस्था में आ जाएगा। यह भी सिद्ध कीजिए कि यदि $A$ के नीचे अधिकतम गहराई $l\cot^2\frac{\theta}{2}$ है, तो प्रत्यास्थता गुणांक $\frac{1}{2}mg\tan^2\theta$ है।

A light elastic string of natural length $l$ has one extremity fixed at a point $A$ and the other attached to a stone (mass $m$) the weight of which in equilibrium would extend the string to a length $b$. Show that if the stone be dropped

from rest at $A$, it will come to instantaneous rest at a depth $\sqrt{b^2 - l^2}$ below the equilibrium position and this depth is attained in time

$$\sqrt{\frac{2l}{g}} + \sqrt{\frac{b-l}{g}} \left\{ \pi - \cos^{-1} \sqrt{\frac{b-l}{b+l}} \right\}$$

Prove also that if the greatest depth below $A$ be $l \cot^2 \frac{\theta}{2}$, then the modulus of elasticity is $\frac{1}{2} mg \tan^2 \theta$. 15

(b) यदि $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ है, तो $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $S$ एक इकाई घन का पृष्ठ है जिसके दो विपरीत कोने क्रमशः (0, 0, 0) तथा (1, 1, 1) पर हैं। अतः अपसरण (डाइवर्जेंस) प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

If $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$, then evaluate $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$, where $S$ is the surface of a unit cube with two opposite corners at (0, 0, 0) and (1, 1, 1) respectively. Hence verify the divergence theorem. 15

(c) (i) दर्शाइए कि $(2x - y - 1)y\,dx + (2y - x - 1)\,x\,dy = 0$ का एक समाकलन गुणक $(x + y + 1)^{-4}$ है। अतः इसे हल कीजिए।

Show that $(x + y + 1)^{-4}$ is an integrating factor of

$$(2x - y - 1)y\,dx + (2y - x - 1)\,x\,dy = 0$$

Hence solve it. 10

(ii) यदि $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ है, तो दर्शाइए कि $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \bar{f}(u)\,du$ है। अतः $L\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$, then show that $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \bar{f}(u)\,du$. Hence evaluate $L\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right\}$. 10

**8.** *(a)* प्राचल-विचरण विधि द्वारा $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$ को हल कीजिए।

Solve $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$ by the method of variation of parameters. 15

*(b)* $l$ लंबाई तथा $W$ भार की एक एकसमान छड़ $AB$ है, जो अपनी लंबाई में बिंदु $A$ से $\frac{l}{3}$ दूरी पर स्थित एक निश्चित बिंदु के परितः स्वतंत्र रूप से घूम सकती है। $AC$ तथा $BC$ दो हल्की डोरियाँ हैं, जिनमें से प्रत्येक की लंबाई $\frac{5}{6}l$ है और जो $w$ भार के एक कण $C$ से जुड़ी है। सिद्ध कीजिए कि यदि $W$, $2w$ से कम है, तो स्थायी संतुलन की स्थिति होगी, जिसमें $AB$ क्षैतिज से $\tan^{-1}\left(\frac{W+w}{4w}\right)$ कोण पर झुकी होगी।

$AB$ is a uniform rod of length $l$ and weight $W$, which can turn freely about a fixed point in its length distant $\frac{l}{3}$ from $A$. $AC$ and $BC$ are light strings each of length $\frac{5}{6}l$, attached to a particle $C$ of weight $w$. Prove that if $W$ is less than $2w$, there will be stable equilibrium with $AB$ inclined to the horizontal at an angle $\tan^{-1}\left(\frac{W+w}{4w}\right)$. 15

*(c)* *(i)* एक अदिश बिंदु फलन $\phi$ तथा एक सदिश बिंदु फलन $\vec{F}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$\nabla \times (\phi\vec{F}) = (\nabla\phi) \times \vec{F} + \phi(\nabla \times \vec{F})$$

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ तथा $r = |\vec{r}\,|$ हैं, तो $\phi = \frac{1}{r}$ तथा $\vec{F} = \vec{r}$ के लिए उपर्युक्त सर्वसमिका (आइडेन्टिटी) को सत्यापित कीजिए।

For a scalar point function $\phi$ and a vector point function $\vec{F}$, prove that

$$\nabla \times (\phi\vec{F}) = (\nabla\phi) \times \vec{F} + \phi(\nabla \times \vec{F})$$

If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $r = |\vec{r}\,|$, then verify the above identity for $\phi = \frac{1}{r}$ and $\vec{F} = \vec{r}$. 10

(ii) यदि $\vec{r} = a\cos t\hat{i} + a\sin t\hat{j} + bt\hat{k}$ है, तो दर्शाइए कि

$$|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|^2 = a^2(a^2 + b^2) \quad \text{और} \quad [\vec{r}\,' \; \vec{r}\,'' \; \vec{r}\,'''] = a^2 b$$

If $\vec{r} = a\cos t\hat{i} + a\sin t\hat{j} + bt\hat{k}$, then show that

$$|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|^2 = a^2(a^2 + b^2) \quad \text{and} \quad [\vec{r}\,' \; \vec{r}\,'' \; \vec{r}\,'''] = a^2 b$$ 10

★ ★ ★